УДК 512.542

О ДОПОЛНЕНИИ КОРАДИКАЛА КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

С.Ф. Каморников[1], **О.Л. Шеметкова**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова*, *Москва*

ON COMPLEMENT OF RESIDUAL OF FINITE GROUP

S.F. Kamornikov[1], **O.L. Shemetkova**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Plekhanov Russian University of Economics*, *Moscow*

Для GWP-формации $\mathfrak{F}$ развивается теорема Л.А. Шеметкова о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала конечной группы.

Ключевые слова: *конечная группа*, *формация*, *корадикал*, *дополняемая подгруппа*, *GWP-формация*.

For a GWP-formation $\mathfrak{F}$ the L.A. Shemetkov's theorem on the complementability of $\mathfrak{F}$-residual of finite group is developed.

Keywords: *finite group*, *formation*, *residual*, *complement*, *GWP-formation*.

Введение

Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала, характеризующее степень вхождения группы в формацию $\mathfrak{F}$, привело к проблеме существования в группе соответственных дополнений. Центральное место в ее решении занимает следующий результат Л.А. Шеметкова из [1], [2]:

Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – конечная группа. Если для любого простого числа p, делящего $\left|G:G^{\mathfrak{F}}\right|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.

Эта теорема универсальна: она справедлива для любой конечной группы и каждой локальной формации и, кроме того, включает многие известные результаты о дополняемости нормальных подгрупп (в том числе теорему Шура – Цассенхауза о дополняемости нормальной холловой подгруппы; теорему Гашюца о дополняемости абелевого $\mathfrak{F}$-корадикала [3]; теорему Ф. Холла о дополняемости коммутанта разрешимой группы с абелевыми силовскими подгруппами [4]; теорему Хупперта [5] о дополняемости $\mathfrak{N}_p$-корадикала, обладающего абелевой силовской p-подгруппой).

Как показывают примеры, условие абелевости соответствующих силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала в приведенной теореме Л.А. Шеметкова существенно. Поэтому одним из подходов, направленых на ослабление абелевости, может быть введение дополнительных ограничений либо на группу G, либо на формацию $\mathfrak{F}$. Такой подход, инициированный работой [6], в последнее время получил развитие в работах [7]–[9]. В рамках этого подхода выполнена и данная работа. В ней для произвольной GWP-формации $\mathfrak{F}$ исследуется существование дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу группы, факторизуемой $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами. Главная цель работы – доказательство следующих двух теорем.

***Теорема* 0.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – GWP-формация и G – группа, обладающая следующими свойствами*:

1) *$G = AB$, где A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G*;

2) *для некоторого простого числа p силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ абелевы*.

Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.

***Теорема* 0.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая GWP-формация и G – группа, представимая в виде произведения $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп A и B. Если подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимы и для любого простого числа $p \in \pi(\mathfrak{F})$ силовские p-подгруппы из $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является дополнением $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G.*

1 Предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются определения и обозначения, принятые в [10], [11].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G).

***Лемма* 1.1** [10, лемма 1.2]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация*, N *– нормальная подгруппа группы* G. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$;

2) *если* $G = HN$, *то* $H^{\mathfrak{F}}N = G^{\mathfrak{F}}N$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H$$

такая, что $H_{i-1} / Core_{H_{i-1}}(H_i) \in \mathfrak{F}$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$.

Следующие три леммы содержат информацию об общих свойствах $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Доказательство этих лемм можно найти в [12], [13].

***Лемма* 1.2.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая формация. Пусть* H *и* N *– подгруппы группы* G, *причем подгруппа* N *нормальна в* G. *Тогда:*

1) *если подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в группе* G, *то подгруппа* HN/N $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G/N, *а подгруппа* HN $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G;

2) *если* $N \subseteq H$, *то подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G *тогда и только тогда, когда подгруппа* H/N $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G/N.

***Лемма* 1.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая наследственная формация. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $\mathfrak{F}$*-корадикал группы* G *содержится в подгруппе* H, *то* H *–* $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа группы* G;

2) *если* H *и* K *– подгруппы группы* G, *причем подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то подгруппа* $H \cap K$ $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* K;

3) *если подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* K *и подгруппа* K $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G;

4) *если подгруппы* H *и* K $\mathfrak{F}$*-субнормальны в* G, *то подгруппа* $H \cap K$ $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G.

***Лемма* 1.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– непустая наследственная формация. Если подгруппа* H $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G, *то подгруппа* $H^{\mathfrak{F}}$ *субнормальна в* G.

Говорят [12], что формация $\mathfrak{F}$ *индуцирует функтор Виландта на* $\mathfrak{F}$*-субнормальных подгруппах*, если $<A,B>^{\mathfrak{F}} = <A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}}>$ для любых двух $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп A и B каждой группы G. В книге [13] такая формация называется *формацией*, *обладающей обобщенным свойством Виландта для корадикалов*, или сокращенно *GWP-формацией* (*the formation with generalized Wielandt property*).

Каждая GWP-формация $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией Фиттинга [12], т. е. она замкнута относительно взятия подгрупп и, кроме того, из $G = AB$, где $A \lhd G$, $B \lhd G$, $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Из определения класса Фиттинга следует, что в любой группе G существует $\mathfrak{F}$*-радикал* $G_{\mathfrak{F}}$, т. е. наибольшая нормальная подгруппа из G, принадлежащая $\mathfrak{F}$ (она совпадает с произведением всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G). В дальнейшем мы будем опираться на следующий результат, устанавливающий связь $\mathfrak{F}$-субнормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы с ее $\mathfrak{F}$-радикалом.

***Лемма* 1.5** [12, лемма 3.3.5]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– GWP-формация. Тогда любая* $\mathfrak{F}$*-субнормальная* $\mathfrak{F}$*-подгруппа группы* G *содержится в ее* $\mathfrak{F}$*-радикале* $G_{\mathfrak{F}}$.

В [14] описаны все разрешимые GWP-формации. Достаточно широкие классы неразрешимых GWP-формаций представлены в работах [14], [15]. В общем случае проблема перечисления всех GWP-формаций остается открытой.

В то же время, как следует из [15], любая GWP-формация $\mathfrak{F}$ является локальной. Кроме того, она *решеточная* [14], т. е. обладает тем свойством, что множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп в любой группе образует подрешетку решетки всех подгрупп этой группы. Таким образом, все GWP-формации лежат в классе всех наследственных локальных решеточных формаций, которые описаны в работах [16], [17].

***Лемма* 1.6** [16]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– наследственная локальная формация. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является решеточной*, *когда формация* $\mathfrak{F}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$;

2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$;

3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ – наследственная локальная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$;

4) всякая нециклическая критическая группа G формации $\mathfrak{M}$, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является примитивной с неабелевым цоколем $N = G^{\mathfrak{M}}$, причем G/N – циклическая примарная группа.

Напомним, что *критической группой формации* $\mathfrak{F}$ называется группа, не принадлежащая $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс групп, то через $D_0\mathfrak{X}$ обозначается класс всех групп, представимых в виде $H_1 \times \ldots \times H_t$, где $H_i \in \mathfrak{X}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$. Если π – некоторое множество простых чисел, то $\mathfrak{X}_{\pi}$ – это класс всех π-групп из $\mathfrak{X}$.

В частности, $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп.

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathbf{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*.

Для формационной функции *f* главный фактор A/B группы *G* называется *f-центральным* (*f-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп *G* таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы *G* является *f*-центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции f*, а *f* – *локальное определение* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{G}_p$ – класс всех *p*-групп, *f* – формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда *f* называется:

(a) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{G}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(c) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в [11, теорема IV.3.7], для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция *f* такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Следуя определению 5.5 из [10], главный фактор H/K будем называть $\mathfrak{F}$*-центральным* ($\mathfrak{F}$*-эксцентральным*), если H/K *f*-централен (соответственно *f*-эксцентрален) для некоторого внутреннего локального определения *f* формации $\mathfrak{F}$.

Нам понадобится следующая информация о главных факторах $\mathfrak{F}$-корадикала. При этом под главным *pd-фактором* группы понимается главный фактор, порядок которого делится на простое число *p*.

***Лемма* 1.7** [10, теорема 11.6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация. Если для некоторого простого числа p силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.*

Далее $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп.

***Лемма* 1.8**. *Если группа G представима в виде $G = \langle A, B \rangle$, где A и B – субнормальные подгруппы группы G, и для некоторого простого числа p подгруппа $A^{\mathfrak{N}}$ не содержит A-главных центральных pd-факторов, а подгруппа $B^{\mathfrak{N}}$ не содержит B-главных центральных pd-факторов, то $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы G не содержит G-главных центральных pd-факторов.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть *G* – группа, которая удовлетворяет условию леммы, но не удовлетворяет ее заключению, причем для группы *G* с такими свойствами число $t = |G| + |G:A| + |G:B|$ является минимальным. Понятно, что $t > 3$ и $G^{\mathfrak{N}} \neq 1$.

Если либо $G = A$, либо $G = B$, то по условию леммы $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы *G* не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что $G \neq A$ и $G \neq B$.

Пусть *N* – минимальная нормальная подгруппа группы *G*. Если *N* не содержится в $G^{\mathfrak{N}}$, то ввиду леммы 1.1 имеем, что $(G/N)^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}N/N \cong G^{\mathfrak{N}}$. Отсюда на основании выбора группы *G* заключаем, что $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы *G* не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов. Противоречие. Значит, любая минимальная нормальная подгруппа группы *G* содержится в подгруппе $G^{\mathfrak{N}}$.

Ввиду леммы 1.1 справедливы равенства $(AN/N)^{\mathfrak{N}} = A^{\mathfrak{N}}N/N$ и $(BN/N)^{\mathfrak{N}} = B^{\mathfrak{N}}N/N$. Кроме того, группа G/N представима в виде

$$G/N = \langle AN/N, BN/N \rangle,$$

где AN/N и BN/N – субнормальные подгруппы группы G/N. Значит, ввиду выбора группы *G* $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}/N$ группы G/N не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов.

Если *L* – минимальная нормальная подгруппа группы *G*, отличная от *N*, то аналогично показывается, что $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}/L$ группы G/L не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов. Но тогда из изоморфизма $G^{\mathfrak{N}} \cong G^{\mathfrak{N}}/N \cap L$ следует, что $\mathfrak{N}$-корадикал $G^{\mathfrak{N}}$ группы *G* не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов. Получили противоречие с выбором группы *G*.

Итак, *N* – единственная минимальная нормальная подгруппа группы *G*. При этом каждый главный *pd*-фактор группы *G* на участке от *N* до $G^{\mathfrak{N}}$ является эксцентральным. А так как для группы *G* лемма не верна, то минимальная нормальная подгруппа *N* группы *G* является *pd*-подгруппой, которая центральна в *G*. Отсюда следует, в частности, что *N* – абелева *p*-группа.

Предположим, что $A^{\mathfrak{N}} = 1$. Тогда $A \subseteq F(G)$ и $G = \langle A, B \rangle = F(G)B$. Отсюда ввиду леммы 2.3.2 из [12] $G^{\mathfrak{N}} = (F(G))^{\mathfrak{N}} B^{\mathfrak{N}} = B^{\mathfrak{N}}$, а значит, ввиду леммы 1.7 подгруппа $G^{\mathfrak{N}}$ не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что $A^{\mathfrak{N}} \neq 1$ и $B^{\mathfrak{N}} \neq 1$.

Обозначим $D = A^{\mathfrak{N}} \cap N$. Предположим, что $D \neq 1$. Тогда так как $N \subseteq Z(G)$, то $D \subseteq Z(A)$. Следовательно, все *A*-главные факторы подгруппы $A^{\mathfrak{N}}$ на отрезке $[1, D]$ являются центральными в *A*. Пришли к противоречию с леммой 1.7. Таким образом, $A^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$. Аналогично показывается, что $B^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$.

Предположим, что подгруппа *A* нормальна в *G*. Тогда из характеристичности $A^{\mathfrak{N}}$ в *A* следует, что $A^{\mathfrak{N}} \triangleleft G$. Так как *N* – единственная минимальная нормальная подгруппа группы *G* и $A^{\mathfrak{N}} \neq 1$, то $N \subseteq A^{\mathfrak{N}}$. Пришли к противоречию с тем, что $A^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$. Таким образом полагаем далее, что подгруппа *A* не нормальна в *G*. Аналогично следует, что подгруппа *B* не нормальна в *G*.

Пусть $|B| \leq |A|$. Ввиду теоремы 7.1 из [10] в группе *G* существует такой элемент *x*, что $A^x \neq A$, $A^x \subseteq N_G(A)$ и $A \subseteq N_G(A^x)$. Отсюда

$$<A, A^x> \subseteq N_G(A) \subset G.$$

Обозначим подгруппу $<A, A^x>$ через *T*. Так как $A^{\mathfrak{N}}$ не содержит *A*-главных центральных *pd*-факторов, то подгруппа $(A^x)^{\mathfrak{N}}$ также не содержит A^x-главных центральных *pd*-факторов. Кроме того, подгруппы *A* и A^x субнормальны в группе $<A, A^x>$. Так как

$$|T| + |T : A| + |G : A^x| < t,$$

то ввиду выбора группы *G* подгруппа $T^{\mathfrak{N}}$ не содержит *T*-главных центральных *pd*-факторов.

Ввиду теоремы Виландта о порождении субнормальных подгрупп *T* субнормальна в *G*. Так как $G = <T, B>$ и

$$|G| + |G : T| + |G : B| < t,$$

то ввиду выбора группы *G* подгруппа $G^{\mathfrak{N}}$ не содержит *G*-главных центральных *pd*-факторов. Снова пришли к противоречию. □

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства факторизуемых групп. Напомним, что для некоторого множества π простых чисел группа называется π-*замкнутой*, если она обладает нормальной холловой π-подгруппой.

***Лемма* 1.9** [18]. *Пусть группа $G = AB$ удовлетворяет свойству D_π. Если A и B – π-замкнутые подгруппы, то*

$$O_\pi(G) = (O_\pi(G) \cap A)(O_\pi(G) \cap B).$$

Конечная группа называется *p-нильпотентной*, если она обладает нормальной холловой p'-подгруппой. Проверка показывает, что множество всех *p*-нильпотентных групп образует формацию.

***Лемма* 1.10** [19]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Если A и B – $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G и $G = AB$, то* $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}} B^{\mathfrak{F}}$.

Следуя [10], приведем определение $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной конечной группы для случая, когда $\mathfrak{F}$ – локальная формация.

Нормальная подгруппа *R* группы *G* называется $\mathfrak{F}$-*предельной нормальной подгруппой*, если $R / R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы *G*. Максимальная подгруппа *M* группы *G* называется $\mathfrak{F}$-*критической* в *G*, если в *G* найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа *R*, что $MR = G$. Подгруппа *H* называется $\mathfrak{F}$-*нормализатором* группы *G*, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G \quad (n \geq 0),$$

в которой подгруппа H_{i-1} $\mathfrak{F}$-критична в H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. По определению, каждая группа *G* обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Для доказательства основных результатов нам понадобится также следующая информация о свойствах $\mathfrak{F}$-нормализаторов. Пусть H – подгруппа, а A / B – нормальный фактор группы G. Говорят, что:

1) *H покрывает* фактор A / B, если $HB \supseteq A$;

3) *H изолирует* фактор A / B, если $H \cap A \subseteq B$.

***Лемма* 1.11** [10]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, G – группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если F – $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то F покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

2 Доказательство теоремы 0.1

Если *p* не принадлежит $\pi(\mathfrak{F})$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем далее, что $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что теорема не верна. Пусть *G* – группа, которая удовлетворяет условию теоремы, но не удовлетворяет ее заключению, причем для группы *G* с такими свойствами число $t = |G| + |G : A| + |G : B|$ является минимальным. Понятно, что $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Если $G = A$, то по условию теоремы силовские *p*-подгруппы из $G^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}$ абелевы, а значит, ввиду леммы 1.7 $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы *G* не содержит *G*-главных $\mathfrak{F}$-центральных *pd*-факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что $G \neq A$ и $G \neq B$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы *G*. Если N не содержится в $G^{\mathfrak{F}}$, то ввиду леммы 1.1 имеем, что $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N \cong G^{\mathfrak{F}}$. Отсюда на основании выбора группы G следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Противоречие. Значит, любая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в подгруппе $G^{\mathfrak{F}}$.

Ввиду леммы 1.1 справедливы равенства $(AN/N)^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}N/N$ и $(BN/N)^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}N/N$. Поэтому силовские p-подгруппы из $(AN/N)^{\mathfrak{F}}$ и $(BN/N)^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Кроме того, группа G/N представима в виде

$$G/N = (AN/N)\,(BN/N),$$

где AN/N и BN/N – $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G/N ввиду леммы 1.2. Значит, ввиду выбора группы G $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/N$ группы G/N не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.

Если L – минимальная нормальная подгруппа группы G, отличная от N, то аналогично показывается, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}/L$ группы G/L не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Но тогда ввиду изоморфизма $G^{\mathfrak{F}} \simeq G^{\mathfrak{F}}/N \cap L$ следует, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Получили противоречие с выбором группы G.

Итак, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. При этом каждый главный pd-фактор группы G на участке от N до $G^{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным. А так как для группы G теорема не верна, то минимальная нормальная подгруппа N группы G является pd-подгруппой, которая $\mathfrak{F}$-центральна в G. Если f – каноническое локальное определение формации $\mathfrak{F}$, то

$$G/C_G(N) \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(N)$, а поэтому $N \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$. Отсюда следует, в частности, что N – абелева p-группа.

Предположим, что $A^{\mathfrak{F}} = 1$. Так как $\mathfrak{F}$ – GWP-формация, то ввиду $\mathfrak{F}$-субнормальности подгруппы A в G и того, что $A \in \mathfrak{F}$, имеем на основании леммы 1.5 $A \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ и $G = AB = G_{\mathfrak{F}}B$. Отсюда $G^{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}{}^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}$, а значит, ввиду леммы 1.7 подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов, противоречие. Поэтому полагаем далее, что $A^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и $B^{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Обозначим $D = A^{\mathfrak{F}} \cap N$. Предположим, что $D \neq 1$. Ввиду [10, теорема 4.7], $f(p)$ является наследственной формацией. Поэтому из $G/C_G(N) \in f(p)$ следует, что

$$AC_G(N)/C_G(N) \in f(p).$$

Значит, ввиду изоморфизма

$$AC_G(N)/C_G(N) \cong A/A \cap C_G(N) = A/C_A(N)$$

имеем, что $A/C_A(N) \in f(p)$. Так как $C_A(N) \subseteq C_A(D)$, то $A/C_A(D) \in f(p)$. Следовательно, все A-главные факторы подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ на отрезке $[1, D]$ являются $\mathfrak{F}$-центральными в A. Пришли к противоречию с леммой 1.7. Таким образом, $A^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Аналогично показывается, что $B^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$.

Так как $\mathfrak{F}$ – GWP-формация, то $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$. Ввиду леммы 1.4 подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в группе G. Кроме того, силовские p-подгруппы из $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ и $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ абелевы, а значит, ввиду леммы 1.7 подгруппа $(A^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ не содержит $A^{\mathfrak{F}}$-главных центральных pd-факторов, а подгруппа $(B^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ не содержит $B^{\mathfrak{F}}$-главных центральных pd-факторов. Поэтому по лемме 1.8 $\mathfrak{N}$-корадикал $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}}$ группы $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит $G^{\mathfrak{F}}$-главных центральных pd-факторов. Следовательно, $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \cap N = 1$. Если $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} \neq 1$, то группа $G^{\mathfrak{F}}$ содержит минимальную нормальную подгруппу, отличную от N, противоречие. Поэтому $(G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{N}} = 1$, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ – нильпотентная подгруппа группы G. А так как N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то, в частности, $G^{\mathfrak{F}}$ – p-группа.

Так как формация $\mathfrak{F}$ является решеточной, то на основании леммы 1.6 она обладает следующими свойствами: 1) $\mathfrak{F} = D_0(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$, $\pi(\mathfrak{M}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \varnothing$; 2) существует такое разбиение $\{\pi_i \mid i \in I\}$ множества $\pi(\mathfrak{H})$ на попарно непересекающиеся подмножества, что $\mathfrak{H} = D_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{S}_{\pi_i})$; 3) $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ – наследственная насыщенная формация, являющаяся классом Фиттинга, нормальным в $\mathfrak{M}^2$; 4) всякая нециклическая критическая группа H формации $\mathfrak{M}$, имеющая единичную подгруппу Фраттини, является монолитической с неабелевым монолитом $L = H^{\mathfrak{M}}$, причем H/L – циклическая примарная группа.

Так как $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то либо $p \in \pi(\mathfrak{M})$, либо $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Тогда из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G/G^{\mathfrak{F}} = (S/G^{\mathfrak{F}}) \times (F/G^{\mathfrak{F}})$, где $S/G^{\mathfrak{F}}$ – холлова $\pi(\mathfrak{M})$-подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{F}}$, принадлежащая формации $\mathfrak{M}$, и $F/G^{\mathfrak{F}}$ – холлова $\pi(\mathfrak{H})$-подгруппа группы $G/G^{\mathfrak{F}}$,

принадлежащая формации $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M} = \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{M})}\mathfrak{M}$ и $G^{\mathfrak{F}}$ – p-группа, где $p \in \pi(\mathfrak{M})$, то $S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Рассмотрим подгруппы $AG^{\mathfrak{F}}$ и $BG^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 1.2 они $\mathfrak{F}$-субнормальны в группе G. Кроме того, $G = (AG^{\mathfrak{F}})(BG^{\mathfrak{F}})$. Так как формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией, то

$$(AG^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} = < A, G^{\mathfrak{F}} >^{\mathfrak{F}} = < A^{\mathfrak{F}}, (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} > = A^{\mathfrak{F}}$$

и $(BG^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} = B^{\mathfrak{F}}$, т. е. $\mathfrak{F}$-корадикалы подгрупп $AG^{\mathfrak{F}}$ и $BG^{\mathfrak{F}}$ являются абелевыми. Если либо $A \subset AG^{\mathfrak{F}}$, либо $B \subset BG^{\mathfrak{F}}$, то $|G| + |G : AG^{\mathfrak{F}}| + |G : BG^{\mathfrak{F}}| < t$ и ввиду выбора группы G и ее подгрупп A и B имеем, что $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Противоречие. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$.

Предположим, что $G^{\mathfrak{F}} \subset S$. Рассмотрим группу F и ее подгруппы $A_1 = A \cap F$ и $B_1 = B \cap F$. Ввиду леммы 1.3 подгруппы A_1 и B_1 $\mathfrak{F}$-субнормальны в F. Подгруппы S и F, очевидно, $\mathfrak{F}$-субнормальны в группе G. Так как формация $\mathfrak{F}$ является GWP-формацией и $S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = < S, F >^{\mathfrak{F}} = < S^{\mathfrak{F}}, F^{\mathfrak{F}} > = F^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$, а $S / G^{\mathfrak{F}}$ и $F / G^{\mathfrak{F}}$ – нормальные холловы подгруппы группы $G / G^{\mathfrak{F}}$, то $A = (A \cap S)A_1$ и $B = (B \cap S)B_1$. При этом подгруппы $A \cap S$ и A_1 $\mathfrak{F}$-субнормальны в A, а $A \cap S \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $A^{\mathfrak{F}} = < A \cap S, A_1 >^{\mathfrak{F}} = (A_1)^{\mathfrak{F}}$. Аналогично $B^{\mathfrak{F}} = (B_1)^{\mathfrak{F}}$. Отметим еще, что из $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq B$ ввиду леммы 1.9 справедливо равенство $F = A_1B_1$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \subset S$, то

$$|F| + |F : A_1| + |F : B_1| < t,$$

а значит, ввиду выбора группы G подгруппа $F^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}$ не содержит F-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Но тогда подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Итак, $S = G^{\mathfrak{F}}$, т. е. G – p-замкнутая группа. Пусть $\mathfrak{L}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда из p-замкнутости группы G следует, что подгруппы A и B $\mathfrak{L}$-субнормальны в группе G. Очевидно, $G^{\mathfrak{L}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что $G^{\mathfrak{L}} \subset G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $G / G^{\mathfrak{L}} = (G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{L}}) \times (F_1G^{\mathfrak{L}} / G^{\mathfrak{L}})$, где F_1 – холлова $\pi(\mathfrak{H})$-подгруппа группы G, принадлежащая $\mathfrak{H}$. Так как $p \in \pi(\mathfrak{F})$, то $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F}$. Кроме того, из изоморфизма $F_1G^{\mathfrak{L}} / G^{\mathfrak{L}} \simeq F_1$ имеем $F_1G^{\mathfrak{L}} / G^{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ – формация, то $G / G^{\mathfrak{L}} \in \mathfrak{F}$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{H}}$. Пришли к противоречию. Следовательно, $G^{\mathfrak{H}} = G^{\mathfrak{F}}$. Аналогично показывается, что $A^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{H}} = B^{\mathfrak{F}}$. Отсюда ввиду леммы 1.10 имеем, что

$$G^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{H}}B^{\mathfrak{H}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}}.$$

Так как $G^{\mathfrak{F}} \subseteq A \cap B$, то $A^{\mathfrak{F}} \lhd G^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}} \lhd G^{\mathfrak{F}}$. Теперь ввиду изоморфизма

$$G^{\mathfrak{F}} / A^{\mathfrak{F}} = A^{\mathfrak{F}}B^{\mathfrak{F}} / A^{\mathfrak{F}} \simeq B^{\mathfrak{F}} / A^{\mathfrak{F}} \cap B^{\mathfrak{F}}$$

и абелевости подгруппы $B^{\mathfrak{F}}$ получаем, что коммутант $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}]$ группы $G^{\mathfrak{F}}$ содержится в $A^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}]$ – нормальная подгруппа группы G. Если $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}] \neq 1$, то из единственности в G минимальной нормальной подгруппы N имеем, что $N \subseteq [G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}] \subseteq A^{\mathfrak{F}}$. Пришли к противоречию с тем, что $A^{\mathfrak{F}} \cap N = 1$. Следовательно, $[G^{\mathfrak{F}}, G^{\mathfrak{F}}] = 1$, т. е. подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ является абелевой. Но тогда по лемме 1.7 $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов. Снова пришли к противоречию с выбором группы G.

2) Пусть $p \in \pi_i$ для некоторого $i \in I$. Тогда из строения формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G / G^{\mathfrak{F}} = (S / G^{\mathfrak{F}}) \times (F / G^{\mathfrak{F}})$, где $S / G^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая холлова π_i-подгруппа группы $G / G^{\mathfrak{F}}$ и $F / G^{\mathfrak{F}}$ – холлова π_i'-подгруппа группы $G / G^{\mathfrak{F}}$, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$. Так как формация $\mathfrak{S}_{\pi_i}$ замкнута относительно расширений и $G^{\mathfrak{F}}$ – p-группа, где $p \in \pi_i$, то $S \in \mathfrak{S}_{\pi_i} \subseteq \mathfrak{F}$. Рассуждая далее по схеме случая 1), снова приходим к противоречию. □

***Следствие* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – GWP-формация и G – группа, обладающая следующими свойствами*:

1) $G = A_1A_2...A_n$, *где* A_1, A_2, …, A_n – *попарно перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G*;

2) *для некоторого простого числа p и каждого $i = 1, 2, ..., n$ силовские p-подгруппы подгруппы $A_i^{\mathfrak{F}}$ абелевы*.

Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных pd-факторов.

***Следствие* 2.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – GWP-формация и G – группа, обладающая следующими свойствами*:

1) $G = A_1A_2...A_n$, *где* A_1, A_2, …, A_n – *попарно перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы G*;

2) *для каждого $i = 1, 2, ..., n$ подгруппа $A_i^{\mathfrak{F}}$ абелева*.

Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G не содержит G-главных $\mathfrak{F}$-центральных факторов.

3 Доказательство теоремы 0.2

Очевидно, множество $\mathfrak{H}$ всех $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимых групп является формацией Фиттинга. Так как $\mathfrak{F}$ – GWP-формация, то $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle$. Ввиду леммы 1.4 подгруппы $A^{\mathfrak{F}}$ и $B^{\mathfrak{F}}$ субнормальны в группе G. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} = \langle A^{\mathfrak{F}}, B^{\mathfrak{F}} \rangle \subseteq G_{\mathfrak{H}}$, т. е. подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ является $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой.

Пусть F – некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. На основании теоремы 0.1 все G-главные факторы группы $G^{\mathfrak{F}}$ являются $\mathfrak{F}$-эксцентральными в G.

Пусть

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G^{\mathfrak{F}} \qquad (3.1)$$

– некоторый G-главный ряд подгруппы $G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду леммы 1.11 $\mathfrak{F}$-нормализатор F изолирует все факторы ряда (3.1), т. е. $F \cap H_i \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует, что

$$F \cap G^{\mathfrak{F}} = F \cap H_n \subseteq F \cap H_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq H_0 = 1,$$

т. е. $F \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Кроме того, из определения $\mathfrak{F}$-нормализатора следует, что справедливо равенство $FG^{\mathfrak{F}} = G$. Значит, $\mathfrak{F}$-нормализатор F является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. □

***Следствие* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – GWP-формация и G – группа, обладающая следующими свойствами*:

1) $G = A_1 A_2 \ldots A_n$, *где* A_1, A_2, …, A_n *– попарно перестановочные $\mathfrak{F}$-субнормальные подгруппы группы* G;

2) *для любого простого числа* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *и каждого* $i = 1, 2, \ldots, n$ *силовские p-подгруппы подгруппы* $A_i^{\mathfrak{F}}$ *абелевы*.

Если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ *подгруппа* $A_i^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-*разрешима*, *то каждый* $\mathfrak{F}$-*нормализатор группы G является дополнением* $\mathfrak{F}$-*корадикала* $G^{\mathfrak{F}}$ *в группе G*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* О формационных свойствах конечных групп / Л.А. Шеметков // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 6. – С. 1324–1327.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

3. *Gaschütz*, *W.* Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen / W. Gaschütz // J. Reine Angew. Math. – 1952. – Vol. 190. – P. 93–107.

4. *Hall*, *P.* The construction of soluble groups / P. Hall // J. Reine Angew. Math. – 1940. – Vol. 182.

5. *Huppert*, *B.* Subnormale Untergruppen und *p*-Sylowgruppen / B. Huppert // Acta Sci. Math. – 1961. – Vol. 22. – P. 46–61.

6. *Каморников*, *С.Ф.* О дополнениях корадикала конечной группы / С.Ф. Каморников // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2013. – № 6 (81). – С. 17–23.

7. *Каморников*, *С.Ф.* О существовании дополнений к корадикалам конечных групп / С.Ф. Каморников, О.Л. Шеметкова // Труды ин-та мат. и мех. УрО РАН. – 2015. – Т. 21, № 1. – С. 122–127.

8. *Ведерников*, *В.А.* О дополнениях к корадикалам конечных групп / В.А. Ведерников, М.М. Сорокина // Матем. сб. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 27–52.

9. *Ballester-Bolinches*, *A.* On complements of $\mathfrak{F}$-residuals of finite groups / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // Communications in Algebra. – 2017. – Vol. 45, № 2. – P. 878–882.

10. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

11. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

12. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск: Беларуская навука, 2003. – 256 с.

13. *Ballester-Bolinches*, *A*. Classes of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

14. *Каморников*, *С.Ф.* Перестановочность подгрупп и $\mathfrak{F}$-субнормальность / С.Ф. Каморников // Сиб. мат. журнал. – 1996. – Т. 37, № 5. – С. 1065–1080.

15. *Ballester-Bolinches*, *A.* On formations of finite groups with the generalized Wielandt property for residuals / A. Ballester-Bolinches, S.F. Kamornikov, V. Perez-Calabuig // J. Algebra. – 2014. – Vol. 412. – P. 173–178.

16. *Васильев*, *А.Ф.* О решетках подгрупп конечных групп / А.Ф. Васильев, С.Ф. Каморников, В.Н. Семенчук // Бесконечные группы и примыкающие к ним алгебраические системы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 27–54.

17. *Каморников*, *С.Ф.* Достаточный признак разрешимой насыщенности формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 4 (25). – С. 69–73.

18. *Pennington*, *E.* On products of finite nilpotent groups / E. Pennington // Math. Z. – 1973. – Vol. 134, № 1. – P. 81–83.

19. *Каморников*, *С.Ф.* Об одном свойстве формации всех *p*-нильпотентных групп / С.Ф. Каморников // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2014. – № 6 (87). – С. 156–160.

Поступила в редакцию 22.07.17.